

## No.1 線形写像の定義

## この回のゴール

- 線形写像の定義を述べ、与えられた写像が線形写像かどうか判定できる.
- $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^m$  への線形写像が、ある行列  $A$  を掛ける写像  $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$  に限ることを説明でき、その  $A$  を求められる.
- 線形写像が基底の行き先だけで決まることを説明できる.
- 合成写像と行列の積の関係を説明できる.

以下,  $V, W, U$  をベクトル空間とする.

## ■ 1. 線形写像の定義

第 4 章では、和とスカラー倍をもつ「ベクトル空間」を考えた. 次は、ベクトル空間からベクトル空間への写像のうち、**和とスカラー倍を保つもの**を考える.

## 定義 1 線形写像

写像  $f: V \rightarrow W$  が次の 2 条件を満たすとき,  $f$  を**線形写像**という.

- (i)  $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$  (すべての  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ )
- (ii)  $f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a})$  (すべての  $\boldsymbol{a} \in V, c \in \mathbb{R}$ )

$V = W$  のとき, 線形写像  $f: V \rightarrow V$  を  $V$  の**線形変換**ともいう.

## 注意

- (i) の左辺の  $+$  は  $V$  の和, 右辺の  $+$  は  $W$  の和である. 「足してから移す」と「移してから足す」が同じ, という意味.
- (i)(ii) をまとめて  $f(c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b}) = cf(\boldsymbol{a}) + df(\boldsymbol{b})$  と書いてもよい.

## 定理 1 線形写像の基本性質

$f: V \rightarrow W$  を線形写像とする.

- (1)  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .
- (2)  $f(-\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a})$ .
- (3)  $f(c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k) = c_1f(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + c_kf(\boldsymbol{a}_k)$ .

【証明】(1) (ii) で  $c = 0$  とし, 第 4 章 No.1 定理 1 (4) を使うと  $f(\mathbf{0}) = f(0\mathbf{0}) = 0f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . (2)  $f(-\boldsymbol{a}) = f((-1)\boldsymbol{a}) = (-1)f(\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a})$ . (3) (i)(ii) をくり返し使う ( $k$  に関する帰納法).  $\square$

## 注意

(1) の対偶「 $f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$  なら線形写像でない」は, 線形でないことを示すのに便利である.

## ■ 2. 線形写像の例

### 例 1 行列が定める線形写像

$A$  を  $m \times n$  行列とする. 写像

$$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

は線形写像である. 分配法則より  $A(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = A\mathbf{a} + A\mathbf{b}$ ,  $A(c\mathbf{a}) = c(A\mathbf{a})$  (第 1 章 No.2 定理 1). た

例えば  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  なら,  $f_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ y \end{pmatrix}$  は  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^3$  への線形写像.

### 例 2 平面の回転

$\mathbb{R}^2$  で, 原点のまわりに角  $\theta$  だけ回転させる写像  $R_\theta$  は線形写像である (平行四辺形を回転しても平行四辺形なので和を保ち, 矢印を伸ばしてから回しても回してから伸ばしても同じなのでスカラー倍を保つ).  $\mathbf{e}_1$  は  ${}^t(\cos \theta, \sin \theta)$  に,  $\mathbf{e}_2$  は  ${}^t(-\sin \theta, \cos \theta)$  に移る.

### 例 3 $\mathbb{R}^n$ 以外の例

- (a) 微分:  $D: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ ,  $D(f) = f'$ .  $(f+g)' = f' + g'$ ,  $(cf)' = cf'$  なので線形写像.
- (b) 代入:  $T: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(f) = {}^t(f(0), f(1), f(2))$ .
- (c) 転置:  $M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{R})$ ,  $A \mapsto {}^tA$ .
- (d) トレース:  $M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \mapsto \text{tr } A$ .

### 例 4 線形写像でない例

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  の写像で,  $f({}^t(x, y)) = {}^t(x+1, y)$  (平行移動) は  $f(\mathbf{0}) = {}^t(1, 0) \neq \mathbf{0}$  なので線形でない.  $g({}^t(x, y)) = {}^t(x^2, y)$  は  $g(2\mathbf{e}_1) = {}^t(4, 0) \neq 2g(\mathbf{e}_1) = {}^t(2, 0)$  なので線形でない.  $M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \mapsto \det A$  も,  $\det(2E) = 4 \neq 2\det E$  なので線形でない.

### コラム: 「1 次関数」は線形写像か

中学で学んだ 1 次関数  $y = ax + b$  は,  $b \neq 0$  なら  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  の線形写像ではない (原点を通らない).  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  の線形写像は  $y = ax$  (比例) だけである. 「線形 (linear)」という言葉は, グラフが直線であることより, 比例の性質 (和と定数倍を保つ) を指している.

### ■ 3. $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像は行列で表される

例 1 で、行列  $A$  を掛ける写像は線形写像だった。実は逆も成り立つ。

#### 定理 2 線形写像と行列

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を線形写像とし、

$$A = (f(e_1) \ f(e_2) \ \cdots \ f(e_n)) \quad (m \times n \text{ 行列})$$

とおく。このとき、すべての  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して  $f(x) = Ax$ 。つまり  $f = f_A$ 。このような  $A$  はただ 1 つで、 $f$  の表現行列という。

【証明】  $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$  なので、定理 1 (3) より

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = (f(e_1) \ \cdots \ f(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax.$$

(行列に列ベクトルを掛けることは、列を  $x_j$  倍して足すことである。) 一意性:  $f = f_B$  なら  $B$  の第  $j$  列は  $Be_j = f(e_j)$  で、 $A$  の第  $j$  列と等しい。  $\square$

#### 表現行列の作り方

$f(e_j)$  を第  $j$  列に並べる。「行」ではなく「列」に並べることに注意。

#### 例 5

例 2 の回転  $R_\theta$  の表現行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

これを回転行列という。

### ■ 4. 線形写像は基底の行き先で決まる

#### 定理 3

$(v_1, \dots, v_n)$  を  $V$  の基底とする。

- (1) 2 つの線形写像  $f, g: V \rightarrow W$  が  $f(v_i) = g(v_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たせば、 $f = g$ 。
- (2) 任意の  $w_1, \dots, w_n \in W$  に対して、 $f(v_i) = w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) となる線形写像  $f: V \rightarrow W$  がただ 1 つ存在する。

【証明】 (1)  $x = \sum x_i v_i$  とすると、 $f(x) = \sum x_i f(v_i) = \sum x_i g(v_i) = g(x)$ 。

(2) 各  $x \in V$  は  $x = \sum x_i v_i$  とただ 1 通りに書ける (第 4 章 No.3 定理 1)。そこで  $f(x) = \sum x_i w_i$  と定める。 $y = \sum y_i v_i$  なら  $x + y = \sum (x_i + y_i) v_i$ 、 $cx = \sum (cx_i) v_i$  なので  $f(x + y) = \sum (x_i + y_i) w_i = f(x) + f(y)$ 、 $f(cx) = cf(x)$ 。よって  $f$  は線形で、 $f(v_i) = w_i$ 。一意性は (1)。  $\square$

## 例題 1

線形写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が  $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  を満たすとき,  $f$  の表現行列を求めよ.

【解答】  $e_1 = \frac{1}{2}{}^t(1, 1) + \frac{1}{2}{}^t(1, -1)$ ,  $e_2 = \frac{1}{2}{}^t(1, 1) - \frac{1}{2}{}^t(1, -1)$  なので, 線形性より

$$f(e_1) = \frac{1}{2}{}^t(3, 1) + \frac{1}{2}{}^t(1, 3) = {}^t(2, 2), \quad f(e_2) = \frac{1}{2}{}^t(3, 1) - \frac{1}{2}{}^t(1, 3) = {}^t(1, -1).$$

よって表現行列は  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . (別解:  $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  から  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$  と求めてもよい.)

## ■ 5. 合成写像

## 定理 4 合成写像

$f: V \rightarrow W$ ,  $g: W \rightarrow U$  が線形写像なら, 合成写像  $g \circ f: V \rightarrow U$  ( $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ) も線形写像である. 特に,  $A$  を  $l \times m$  行列,  $B$  を  $m \times n$  行列とすると

$$f_A \circ f_B = f_{AB}.$$

【証明】  $g(f(a+b)) = g(f(a) + f(b)) = g(f(a)) + g(f(b))$ , スカラー倍も同様. 後半は  $(f_A \circ f_B)(x) = A(Bx) = (AB)x$  (結合法則).  $\square$

## コラム: 行列の積はなぜあの定義なのか

第 1 章 No.2 で, 行列の積を「行  $\times$  列」という少し不思議な規則で定義した. 定理 4 は, その定義が「線形写像を続けて行うこと (合成)」に対応するように選ばれていたことを示している. 積が交換できない ( $AB \neq BA$ ) のも, 「 $f$  してから  $g$ 」と「 $g$  してから  $f$ 」が一般に違うことの反映である.

## 例題 2

$\mathbb{R}^2$  で, 直線  $y = x$  に関する対称移動を  $S$ , 原点のまわりの  $90^\circ$  回転を  $R$  とする.  $R \circ S$  ( $S$  のあとに  $R$ ) はどのような移動か.

【解答】  $S$  は  $e_1 \mapsto e_2$ ,  $e_2 \mapsto e_1$  なので表現行列は  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  $R$  は例 5 で  $\theta = 90^\circ$  として  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

よって  $R \circ S$  の表現行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これは  ${}^t(x, y) \mapsto {}^t(-x, y)$ , つまり  $y$  軸に関する対称移動である. (順番を逆にした  $S \circ R$  は  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  で,  $x$  軸に関する対称移動になる.)

## ■ 練習問題

1. 次の写像は線形写像か.

(a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f^t(x, y) = {}^t(x + y, x - y)$

(b)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f^t(x, y) = {}^t(xy, x)$

(c)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f^t(x, y) = |x| + y$

(d)  $T: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}, T(f) = f(1)$

(e)  $T: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2, T(f) = f + 1$

2.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f^t(x, y, z) = {}^t(x + 2y - z, 3x - z)$  の表現行列を求めよ.

3. 線形写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が  $f^t(1, 2) = {}^t(3, 1), f^t(1, 1) = {}^t(1, 0)$  を満たすとき,  $f$  の表現行列を求めよ.

4.  $\mathbb{R}^2$  の次の線形変換の表現行列を求めよ.

(1)  $x$  軸への正射影  ${}^t(x, y) \mapsto {}^t(x, 0)$

(2) 原点のまわりの  $60^\circ$  回転

(3)  $x$  軸に関する対称移動のあと, 原点のまわりの  $90^\circ$  回転を行う移動

5. 線形写像  $f$  について,  $f(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})$  を示せ.

6. (考えてみよう)  $f^t(1, 1) = {}^t(1, 0), f^t(2, 2) = {}^t(1, 1)$  を満たす線形写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  は存在するか. また,  $f^t(1, 1) = {}^t(1, 0), f^t(2, 3) = {}^t(1, 1)$  ならどうか.

## ■ 練習問題の解答

1. (a) 線形. 行列  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  を掛ける写像. (b) 線形でない.  $f(2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) = {}^t(4, 2) \neq 2f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = {}^t(2, 2)$ . (c) 線形でない.  $f(-\mathbf{e}_1) = 1 \neq -f(\mathbf{e}_1) = -1$ . (d) 線形.  $(f + g)(1) = f(1) + g(1), (cf)(1) = cf(1)$ . (e) 線形でない.  $T(0) = 1 \neq 0$ .

2.  $f(\mathbf{e}_1) = {}^t(1, 3), f(\mathbf{e}_2) = {}^t(2, 0), f(\mathbf{e}_3) = {}^t(-1, -1)$  を列に並べて  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

3.  $\mathbf{e}_2 = {}^t(1, 2) - {}^t(1, 1)$  より  $f(\mathbf{e}_2) = {}^t(3, 1) - {}^t(1, 0) = {}^t(2, 1)$ .  $\mathbf{e}_1 = {}^t(1, 1) - \mathbf{e}_2$  より  $f(\mathbf{e}_1) = {}^t(1, 0) - {}^t(2, 1) = {}^t(-1, -1)$ . 表現行列は  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

4. (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . (2)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . (3) 対称移動  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  のあとに回転  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  なので, 積は (後に行う方を左に書いて)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . これは直線  $y = x$  に関する対称移動.

5.  $f(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = f(\mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + (-1)f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})$ .

6. 1 つめは存在しない (線形なら  $f^t(2, 2) = 2f^t(1, 1) = {}^t(2, 0)$ ). 2 つめは存在する (2 本は 1 次独立で基底なので, 定理 3 (2)).